Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Ene-Mar 2005

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-2115—Primer Parcial, 02/02/05, 30 %—7:30am–A

#1→12 pts	#2→6 pts	#3→6 pts	#4→6 pts	Total→30 pts

1. (12 pts.) Determine cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen (3 pts. c/u):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - n + 5}{3n + 2n^2 + 2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-2}{n^2+3}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3!}{n^2 - 4}$

Solución:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - n + 5}{3n + 2n^2 + 2}$.

$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 5}{3n + 2n^2 + 2} = \frac{3}{2}$, por lo tanto la serie DIVERGE.

b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-2}{n^2+3}\right)$. Haciendo uso del criterio de series alternantes, sea $a_n = \dfrac{n-2}{n^2+3}$ y consideremos $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+3}$ de donde tenemos que $f(x) = \dfrac{-x^2+4x+3}{(x^2+3)^2} < 0$ para todo $x \geq 5$, por lo tanto, es decreciente para todo para todo $x \geq 5$. Además $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces la serie alternante CONVERGE.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Comparemos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que sabemos que es convergente.

Observamos que $n^2 < n^2 + n$ para todo $n > 0$ y entonces $\dfrac{1}{n^2+n} < \dfrac{1}{n^2}$ para todo $n > 0$, por lo tanto la serie dada es CONVERGENTE.

d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3!}{n^2 - 4}$

Haciendo uso del criterio de comparación al límite la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3!}{n^2-4}}{\frac{1}{n^2}} = 6$ por lo tanto la serie dada es CONVERGENTE.

2. (6 pts.) Halle el conjunto de convergencia para la serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n\,3^n}$.

Solución: Consideramos $a_n = \frac{(2x-1)^n}{n\,3^n}$. Usamos el criterio del cociente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}}}{\frac{(2x-1)^n}{n\,3^n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2x-1}{(n+1)\,3}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} (2x-1)\frac{n}{(n+1)\,3} \\
&= \frac{2x-1}{3}
\end{aligned}$$

La serie de potencias converge si $\left|\frac{2x-1}{3}\right| < 1$, es decir si $|2x-1| < 3$ o bien $-3 < 2x-1 < 3$. Sabemos que converge si $x \in (-1,2)$. Aparte, investigamos en los extremos del intervalo, $x=-1$ y $x=2$. En $x=-1$ tenemos la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2(-1)-1)^n}{n\,3^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que es CONVERGENTE.

En $x=2$ tenemos la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2(2)-1)^n}{n\,3^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es DIVERGENTE.

Entonces converge si $x \in [-1,2)$.

3. (6 pts.) Halle la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \ln\left(\frac{5+x}{2-x}\right)^2$

Solución: Aplicando propiedades de logaritmo se tiene

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln\left(\frac{5+x}{2-x}\right)^2 &= \\
&= 2\ln\frac{5(1+\frac{x}{5})}{2(1-\frac{x}{2})} \\
&= 2\ln 5 + 2\ln(1+\frac{x}{5}) - 2\ln(2) - 2\ln(1-\frac{x}{2})
\end{aligned}$$

Como sabemos $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si $|x|<1$, e integrando tenemos $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, si $|x|<1$, tenemos que

$$2\ln 5 + 2\ln(1+\frac{x}{5}) - 2\ln(2) - 2\ln(1-\frac{x}{2}) = 2\ln 5 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} - 2\ln(2) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)}$$

luego resulta

$$f(x) = \ln\left(\frac{5+x}{2-x}\right)^2 = 2\ln 5 - 2\ln(2) + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

4. (6 pts.) Analice la sucesión definida por la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}a_n; \quad a_1 = 1.$$

Demuestre que la sucesión dada converge o demuestre que diverge según sea el caso.
Solución: Se tiene $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}a_n; \quad a_1 = 1$, y así, $a_2 = 1 + \frac{1}{3}a_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Observamos $a_2 > a_1$. Supongamos como hipótesis inductiva que $a_{n+1} > a_n$. Entonces observamos que $a_{n+2} = 1 + \frac{1}{3}a_{n+1} > 1 + \frac{1}{3}a_n = a_{n+1}$, y por lo tanto la sucesión es monótona creciente.

Veamos ahora si la sucesión es acotada superiormente. Sabemos que $a_1 = 1 < 10$.
Supongamos como hipótesis inductiva que $a_n < 10$, entonces $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}a_n < 1 + \frac{10}{3} < 10$, por lo que la sucesión es acotada superiormente.

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ CONVERGE por ser una sucesión monótona creciente y acotada superiormente.

Además, si queremos hallar el valor del límite L de la sucesión, tomando límites a la igualdad de recurrencia tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{3}a_n$, es decir $L = 1 + \frac{1}{3}L$ por lo que $L = \frac{3}{2}$.